

# Raport z badania zmienności bitcoina i ethereum w latach 2017-2021 pod kątem stosowania modelu wyceny Blacka-Scholesa-Mertona.

Dr Marcin Bartkowiak

Instytut Informatyki i Ekonomii Ilościowej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu

## 1. Wstęp

Pierwsze koncepcje dotyczące utworzenia elektronicznego pieniądza wykorzystującego kryptografię odnotowano już w latach 80 XX wieku<sup>1</sup>. Ograniczenia technologiczne i brak szerszego zainteresowania spowodowały, że pomysł się nie przyjął. Sprzyjające warunki do rozwoju kryptowalut pojawiły się dopiero w 2008 roku. Odpowiednio rozwinięta infrastruktura informatyczna i kryzys finansowy, który zachwiał stabilnością wielu walut, a zwłaszcza dolara, stworzyły podatny grunt dla projektu zaproponowanego w artykule „*Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*”<sup>2</sup>. Artykuł opisywał zasady działania kryptowaluty nazwanej bitcoinem z transakcjami zapisywanymi w blockchainie. Od tamtego momentu powstało kilka tysięcy alternatywnych dla bitcoina rozwiązań, niemniej pozostaje on najpopularniejszą kryptowalutą z około 40% udziałem w kapitalizacji rynku wszystkich kryptowalut. Na drugim miejscu w tym zestawieniu jest ethereum z około 20% udziałem<sup>3</sup>.

Kryptowaluty są więc wciąż stosunkowo nowym instrumentem finansowym, charakteryzującym się wysoką dynamiką notowań, z częstymi głębokimi zmianami cen. Własności cen i stóp zwrotu kryptowalut odbiegają od notowań głównych par walutowych. Zasadne jest więc pytanie, czy w przypadku opcji, dla których instrumentem bazowym są kryptowaluty, można stosować standardowe modele wyceny. W szczególności, czy uprawnione jest stosowanie modelu Blacka-Scholesa-Mertona.

## 2. Przedmiot i cel badania zmienności bitcoina i ethereum.

Badanie przeprowadzono dla dwóch głównych kryptowalut: ethereum (ETC) i bitcoin (BTC) w okresie 2017-2021 dla cen wyrażonych w USD. BTC został wprowadzony w 2009 roku, a ETH w 2015 roku. Wybrano okres, w którym funkcjonowały obie waluty i jednocześnie pominięto pierwszą fazę rozwoju, zauważalną dla praktycznie wszystkich kryptowalut, czyli fazę zdobywania zaufania. W fazie tej liczba zawieranych transakcji i obroty są niewielkie, a ceny stabilne.

---

<sup>1</sup>Mukhopadhyay U., Skjellum A., Hambolu, O., Oakley J., Yu L. Brooks R., *A brief survey of Cryptocurrency systems*, (2016) 14th Annual Conference on Privacy, Security and Trust (PST), 2016, pp. 745-752, doi: 10.1109/PST.2016.7906988.

<sup>2</sup>Nakamoto, S. (2008). *Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system*. *Decentralized Business Review*, 21260.

<sup>3</sup> Dane za <https://pl.tradingview.com/markets/cryptocurrencies/global-charts/> (dostęp 14.01.2022)

Celem badania było ustalenie własności stóp zwrotu, a zwłaszcza zmienności. Model wyceny opcji Blacka-Scholesa-Mertona (model BSM) zakłada, że ceny instrumentu bazowego mają rozkład log-normalny, co jest równoznaczne z normalnością rozkładów logarytmicznych stóp zwrotu. Ponadto w modelu zakłada się, że zmienność jest stała w czasie. Liczne badania dotyczące stóp zwrotu różnego rodzaju instrumentów, między walut, indeksów, akcji wykazały, że założenia modelu BSM są nierealistyczne. Powszechna jest leptokurtyczność i gruboogonowość rozkładów stóp zwrotu oraz grupowanie się zmienności. Mimo to, model BSM pozostał powszechnie wykorzystywanym narzędziem do wyceny opcji europejskich. Inwestorzy nauczyli się bowiem korygować ceny uzyskiwane z modelu, tak by uwzględnić empiryczne własności rozkładów. Jeśli więc tylko stopy zwrotu BTC i ETH mają własności nieodbiegające od klasycznych instrumentów finansowych, uzasadnione jest stosowanie modelu BSM do wyceny opcji na te kryptowaluty.

### **3. Wyniki badania**

W pierwszej kolejności zbadano kształtowanie się cen i stóp zwrotu (wykres 1 i 2). Dynamika zmian dla obu kryptowalut była bardzo podobna. Poziomy cen w 2021 roku były znacznie większe niż w latach wcześniejszych, zarówno BTC, jak i ETH w 2021 roku zanotowały historyczne maksima cen. Natomiast dzienne stopy zwrotu charakteryzują się dużymi wahaniami w całym badanym okresie, z wyróżniającym się około 40% spadkiem, który miał miejsce 12 marca 2020 roku, co było związane z rozszerzającą się pandemią SARS-CoV-2.

Analiza cen i stóp zwrotu ETH i BTC wskazuje, że wielkości te charakteryzują się większą dynamiką niż w przypadku klasycznych instrumentów. Kilkunasto-, czy nawet kilkudziesięcioprocentowe dzienne stopy zwrotu występują znacznie częściej niż ma to miejsce w przypadku np. głównych par walutowych.

W następnym etapie badania sprawdzono rozkłady empiryczne logarytmicznych stóp zwrotu. Wygenerowano histogramy i oszacowano funkcje gęstości (wykres 3-4). Badane zwroty nie mają rozkładu normalnego, histogramy i empiryczne funkcje gęstości znacząco różnią się od teoretycznej funkcji gęstości rozkładu normalnego (o tej samej średniej i odchyleniu co badane zwroty), wykazując leptokurtyczność (koncentrowanie się wartości wokół średniej) i gruboogonowość (częstsze niż wynikałoby to z rozkładu normalnego występowanie wartości ekstremalnych).

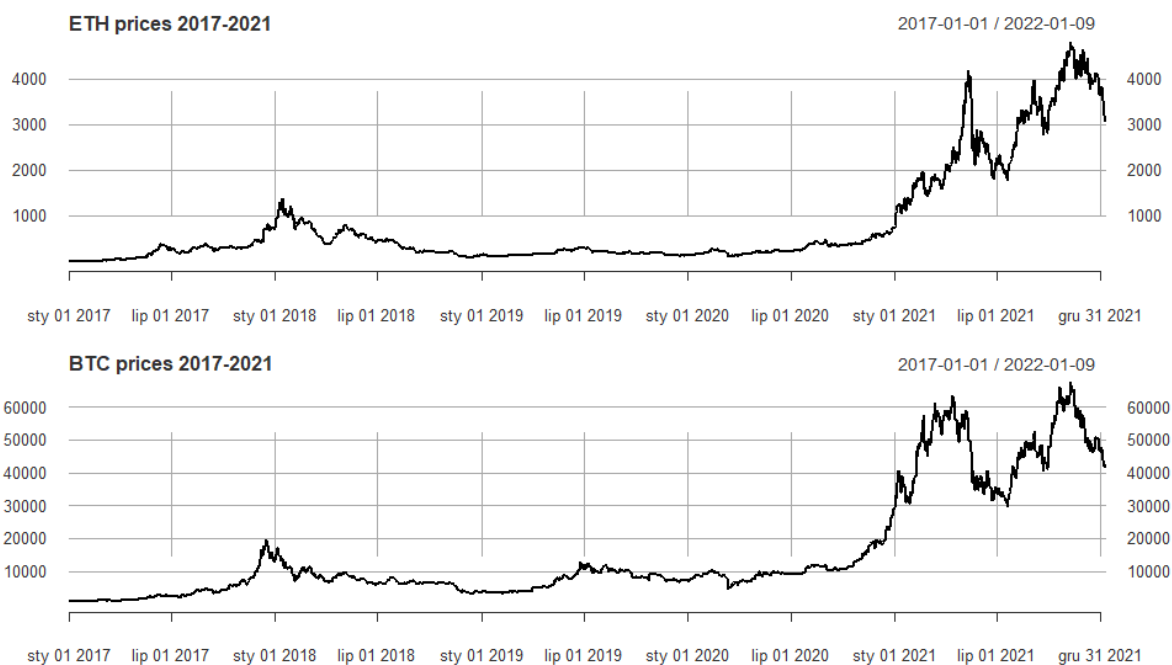
Brak normalności i gruboogonowość rozkładów potwierdzają wykresy kwantyl-kwantyl (wykres 5-6), na których widać, że kwantyle empiryczne oddalone od wartości średniej różnią się znacząco od kwantyli teoretycznych typowych dla rozkładu normalnego.

Trzeci etap badania dotyczył już zmienności logarytmicznych stóp zwrotu. Zmienność jest wielkością nieobserwowalną bezpośrednio na rynku, a zatem do jej pomiaru konieczne jest wykorzystanie estymatora. Analiza zmienności może być przeprowadzona w dwóch ujęciach:

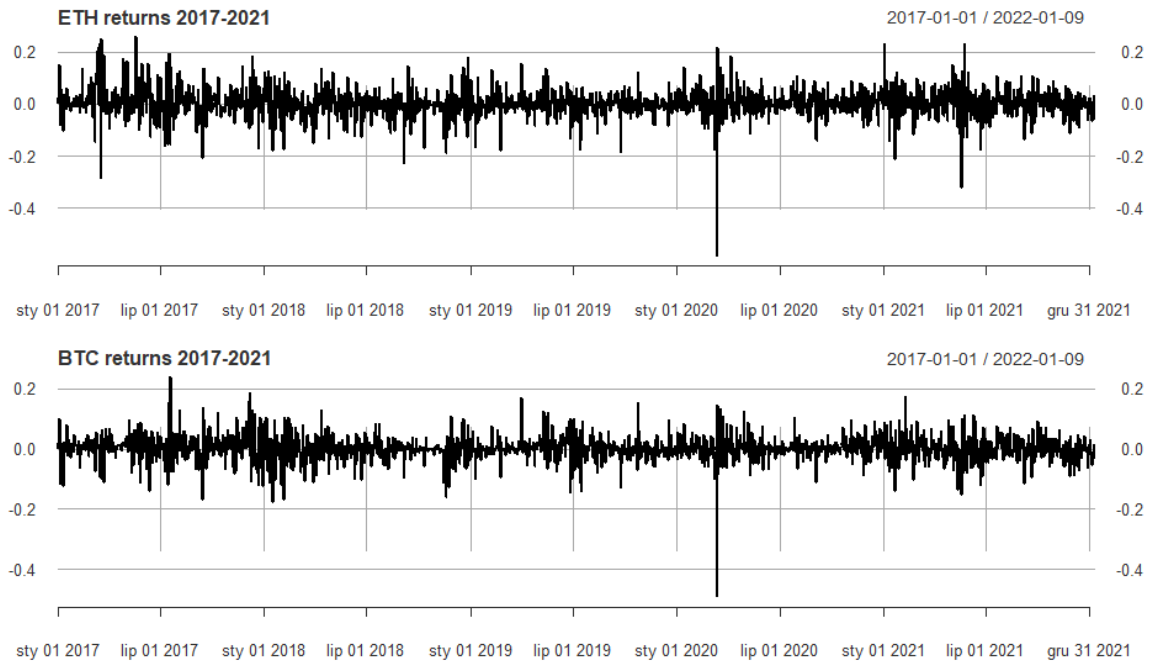
- statycznym
- dynamicznym.

W ujęciu statycznym (nazywanym też historycznym) zmienność jest estymowana jako annualizowane odchylenie standardowe dziennych logarytmicznych stóp zwrotu, przy czym odchylenie to jest wyliczane dla ustalonej długości ruchomego okna obserwacji.

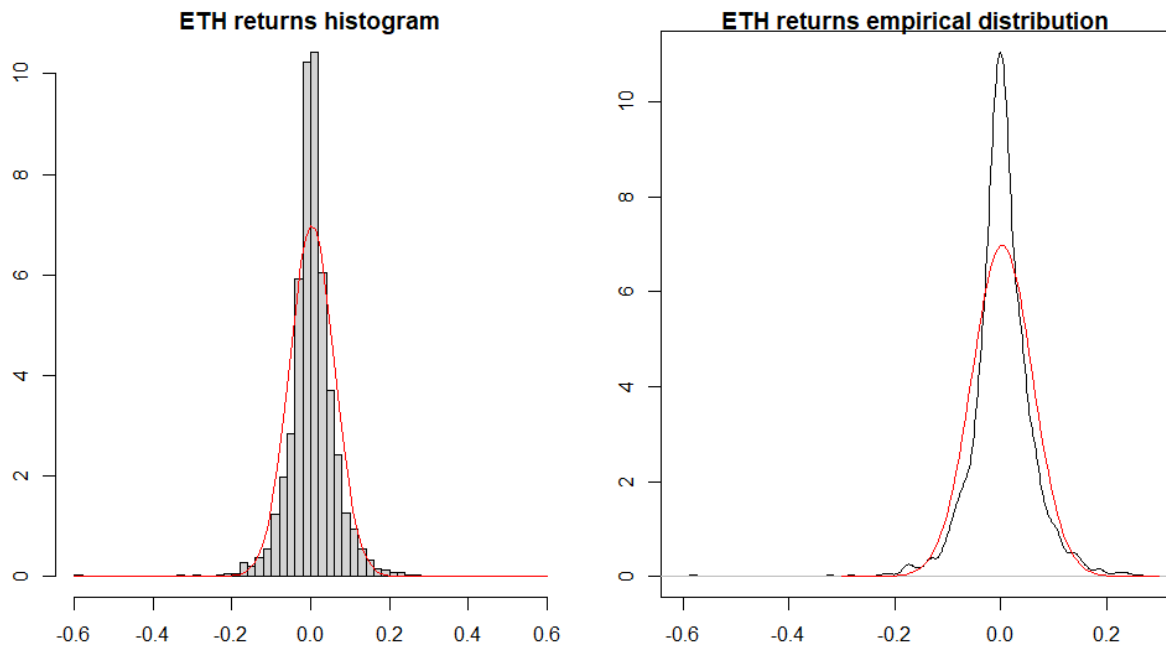
Wykres 1. Ceny ETH i BTC w okresie 2017-2021



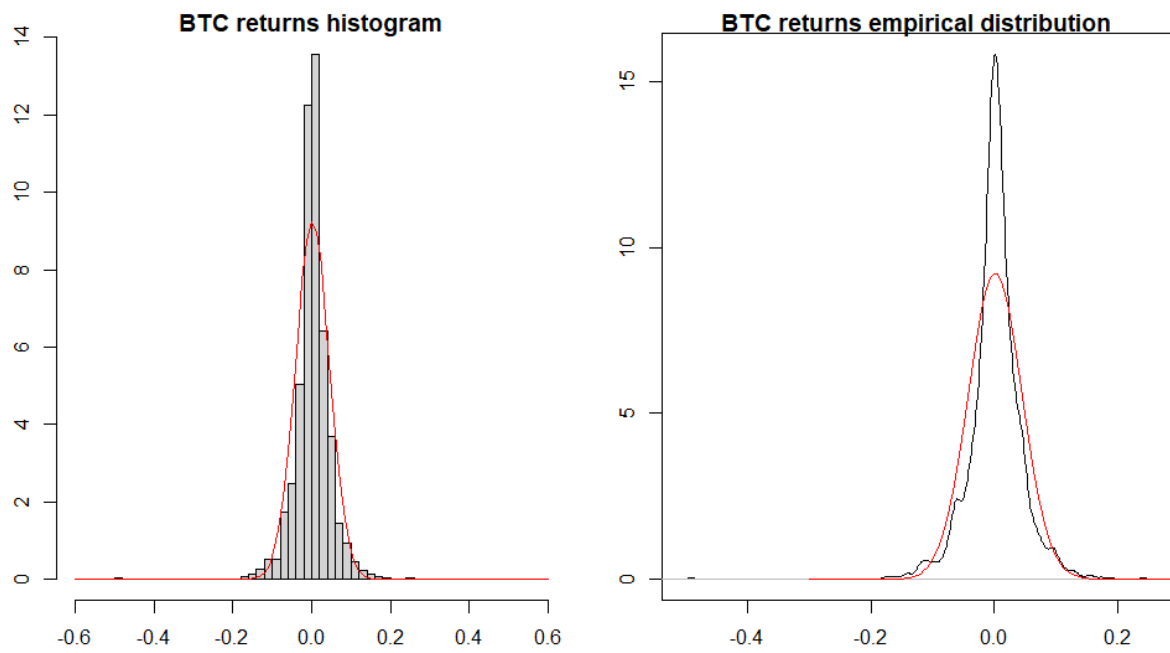
Wykres 2. Stopy zwrotu ETH i BTC w okresie 2017-2021



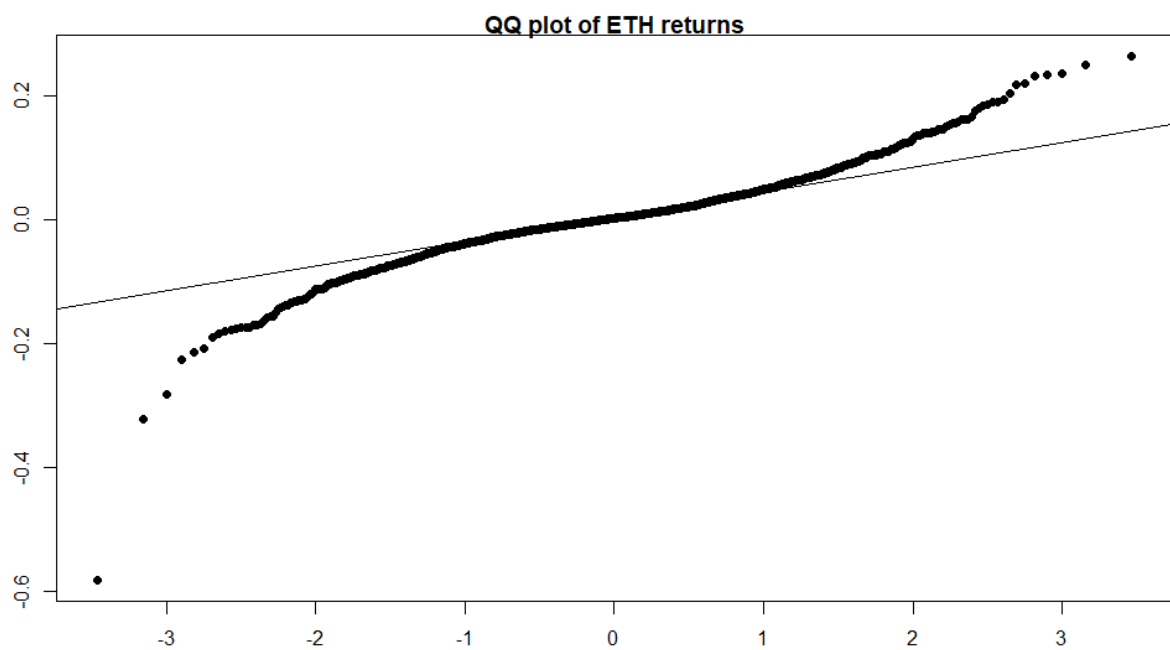
Wykres 3. Histogram i empiryczna funkcja gęstości rozkładu stóp zwrotu ETH na tle rozkładu normalnego.



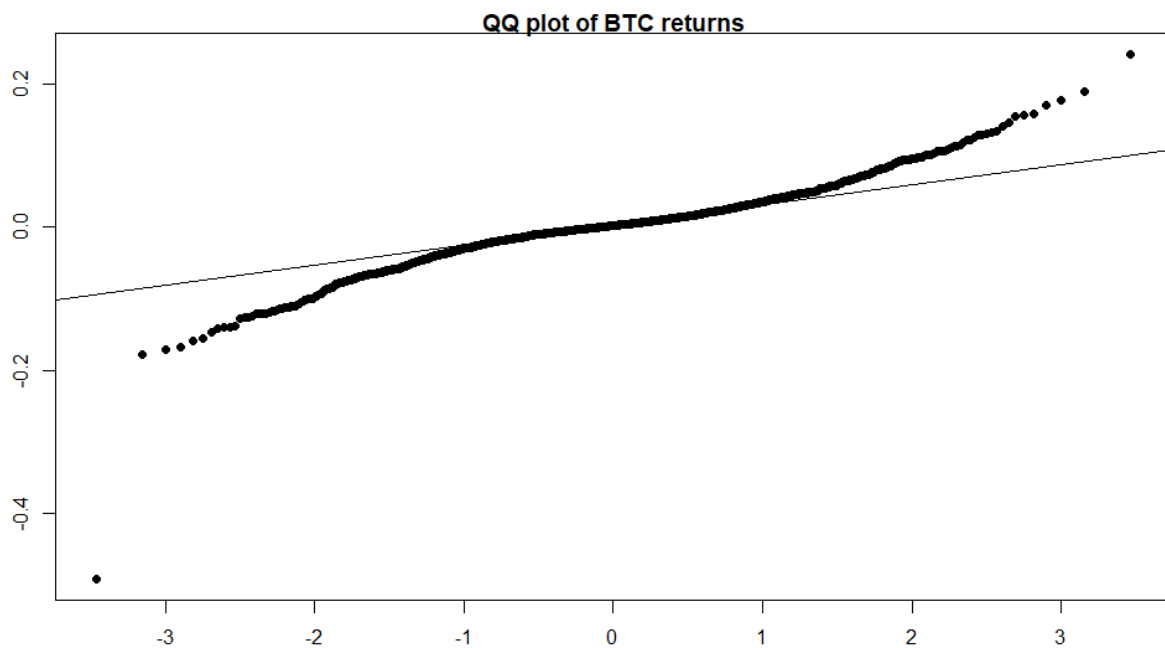
Wykres 4. Histogram i empiryczna funkcja gęstości rozkładu stóp zwrotu ETH na tle rozkładu normalnego.



Wykres 5. Wykres kwantyl-kwantyl dla stóp zwrotu ETH



Wykres 6. Wykres kwantyl-kwantyl dla stóp zwrotu BTC



Milcząco zakłada się, że na długości okna obserwacji zwroty są niezależne lub co najmniej nieskorelowane i mają jednakowy rozkład.

W ujęciu dynamicznym badane są rozkłady warunkowe i momenty warunkowe, a w szczególności warunkowa wariancja (czy warunkowe odchylenie standardowe). Wielkości te są zmiennymi losowymi mierzalnymi względem zbioru generowanego przez napływające informacje na temat procesu ceny. Dlatego też rozkłady tych zmiennych mogą ewoluować w czasie, co oznacza, że w każdym punkcie obserwacji należy wyliczyć nowe oszacowania parametrów rozkładów na podstawie przeszłych obserwacji. Jeśli zakładamy, że na obecne zwroty wpływają zwroty przeszłe i jednocześnie przyszłe zwroty zależą od obecnych, to konieczne jest wykorzystanie rozkładów warunkowych.

Warunkowe odchylenie standardowe nazywane jest zmiennością warunkową. W praktyce do jej wyliczenia wykorzystywane są modele zmienności stochastycznej (stochastic volatility – SV) lub uogólnione autoregresyjne modele warunkowej heteroskedastyczności (*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity* – GARCH). Modele SV są modelami z czasem ciągłym, a modele GARCH z czasem dyskretnym.

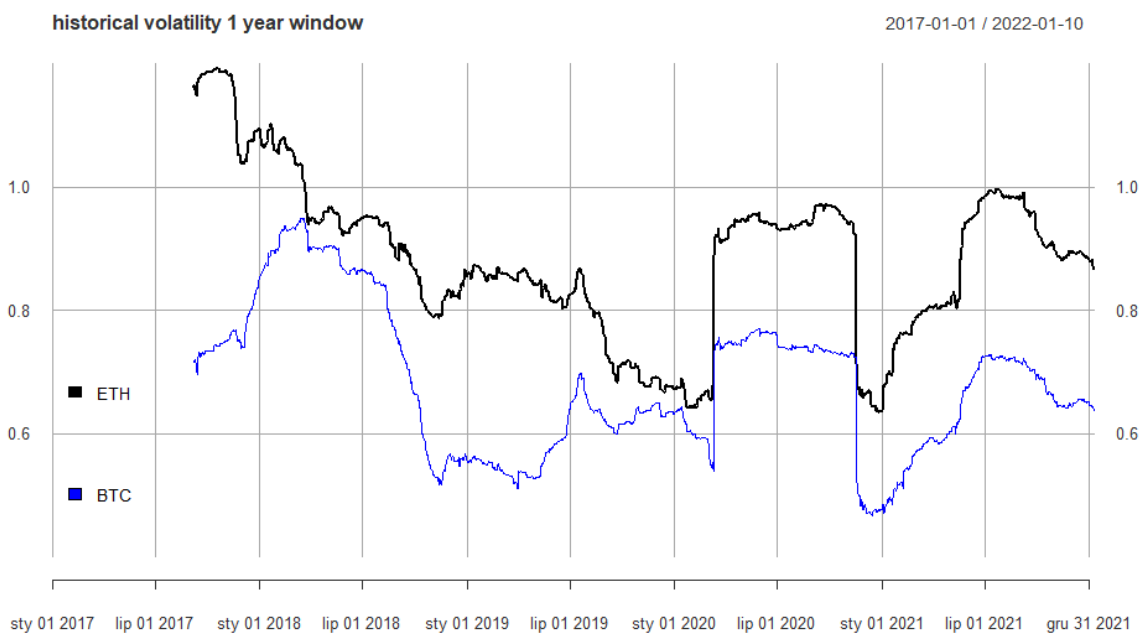
Zmienność historyczną wyznaczono dla okien obserwacji o długości jednego roku, jednego kwartału, jednego miesiąca i jednego tygodnia. Tak wyznaczona zmienność jest dla obu kryptowalut bardzo wysoka i oczywiście tym wyższa, im krótsze okno, dla którego wyznaczane są odchylenia standardowe (wykresy 7-10). Zmienność historyczna dla

klasycznych aktywów jest znacznie mniejsza, w przypadku głównych par walutowych wynosi kilka do kilkunastu procent, a dla indeksów giełdowych od kilkunastu do kilkudziesięciu procent.

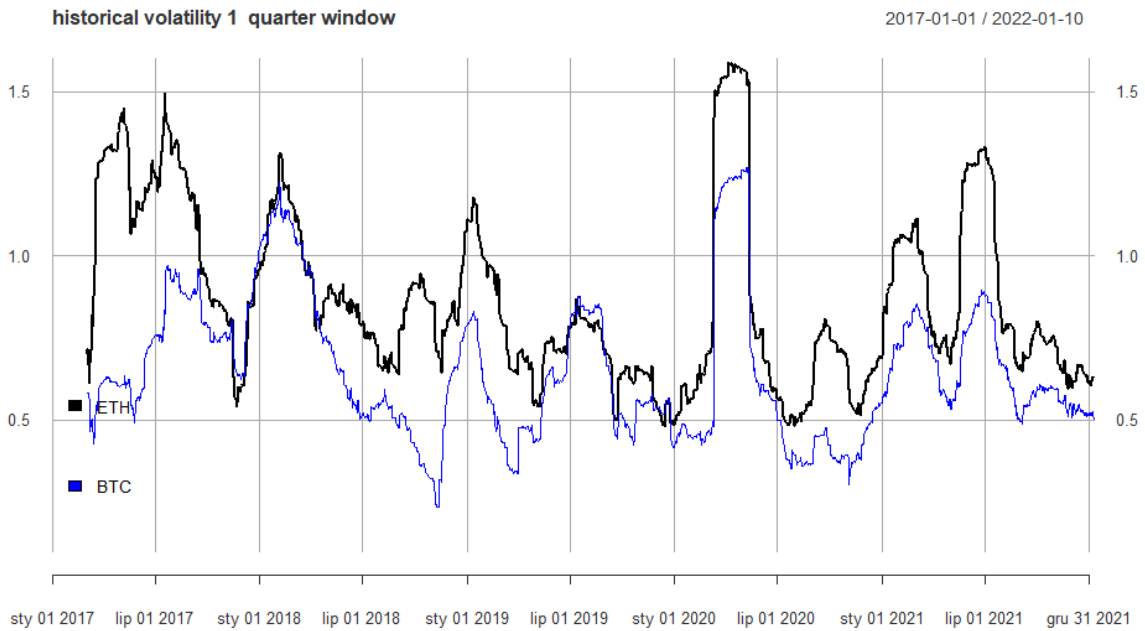
Na prezentowanych wykresach dostrzec też można jedną z największych wad zmienności historycznej – pojedyncza ekstremalna obserwacja może zawyżyć poziom zmienności dla okresu równego długości okna obserwacji. Właśnie taka sytuacja miała miejsce w 2020 roku, wspomniany marcowy spadek wyniósł zmienność na znacznie wyższy poziom, który był utrzymywany aż do momentu, w którym skrajna obserwacja opuściła okno obserwacji. Z tego względu badanie natury zmienności dobrze jest uzupełnić o ujęcie dynamiczne. W tym celu wyestymowano model ARMA(1,1)-GARCH(1,1), na bazie którego wyznaczona została zmienność warunkowa. Wybrano najprostszą specyfikację modelu GARCH, ponieważ z licznych badań wynika, że jest to model, który można stosunkowo łatwo oszacować, a jednocześnie pozwala on na wychwycenie nieliniowych zależności w warunkowej wariancji. Uzyskana zmienność charakteryzuje się wysoką dynamiką (wykres 11-12), okresy o niskiej zmienności są przeplatane okresami o wysokiej zmienności, przy czym częstotliwość tych zmian jest duża, nie występują dłuższe okresy o względnie stabilnej zmienności.

W badaniu zmienności warunkowej pomocnym parametrem jest tak zwana trwałość, która informuje o tym, jak szybko duże zmienności zanikają po szoku. Trwałość można wyrazić jako tak zwany okres półtrwania.

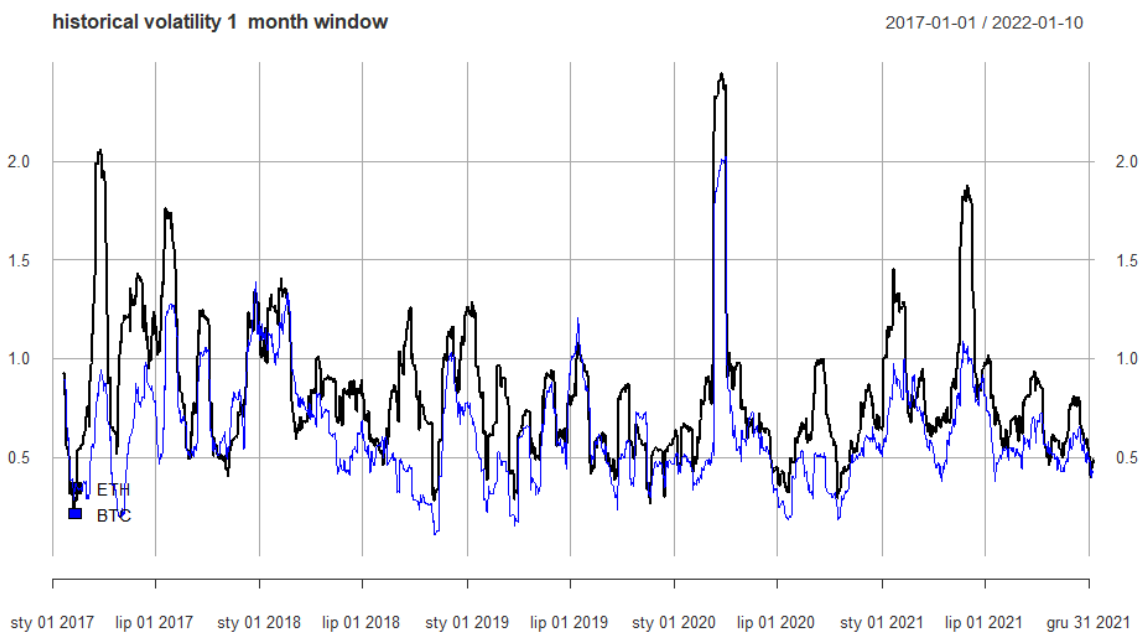
Wykres 7. Zmienność historyczna ETH i BTC w okresie 2017-2021 (roczne okno)



Wykres 8. Zmienność historyczna ETH i BTC w okresie 2017-2021 (kwartalne okno)

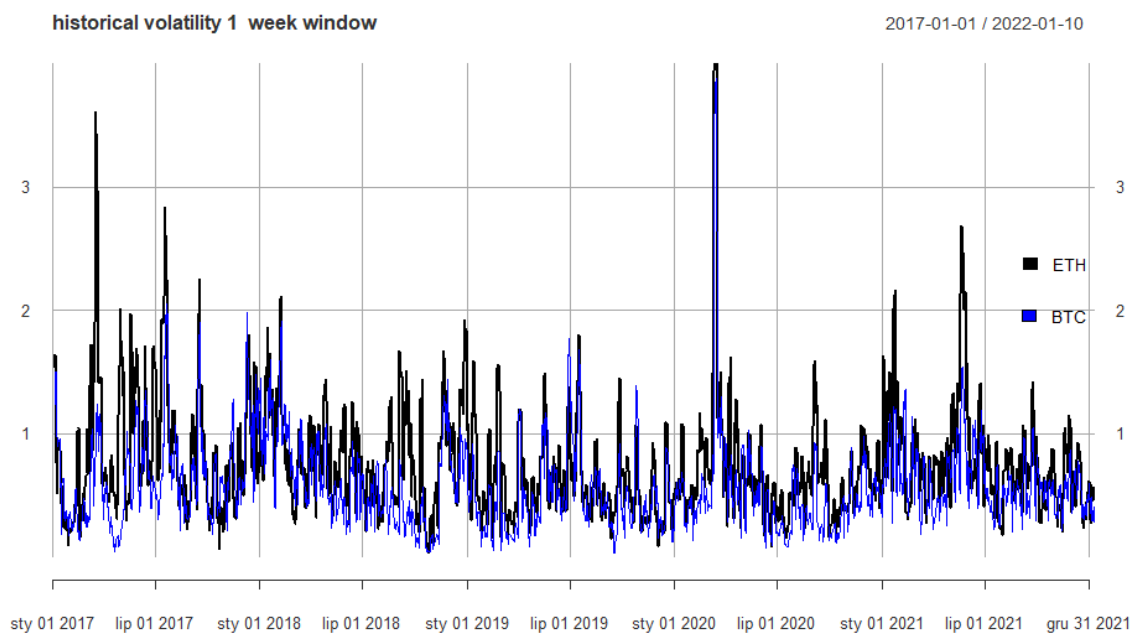


Wykres 9. Zmienność historyczna ETH i BTC w okresie 2017-2021 (miesięczne okno)

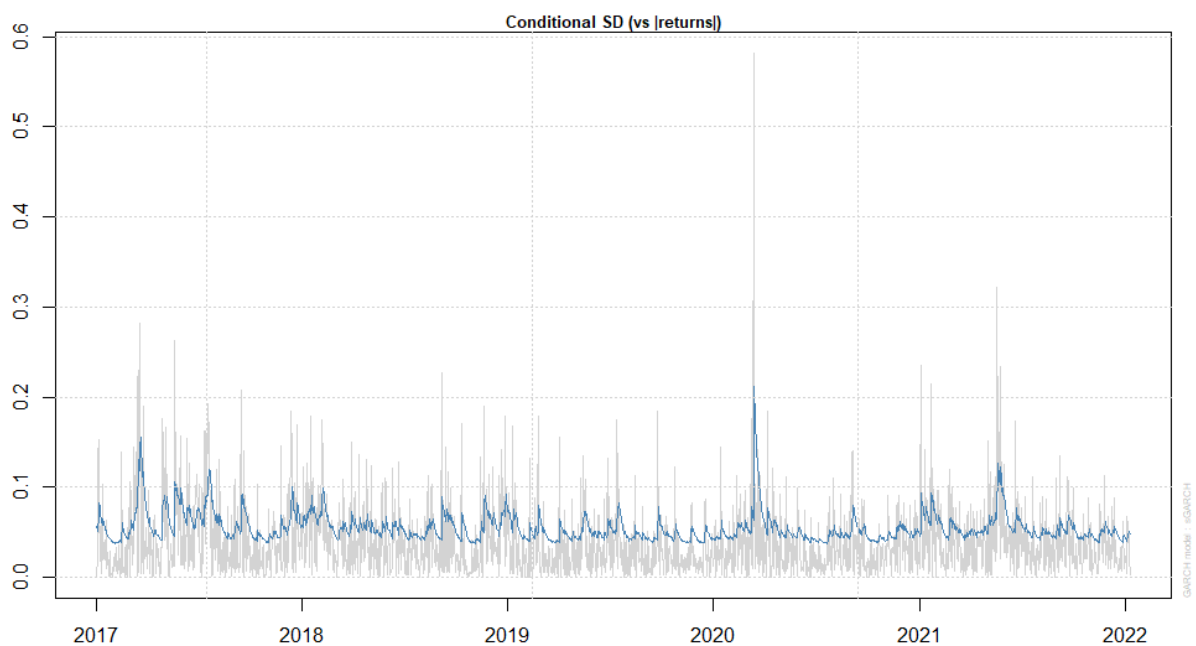




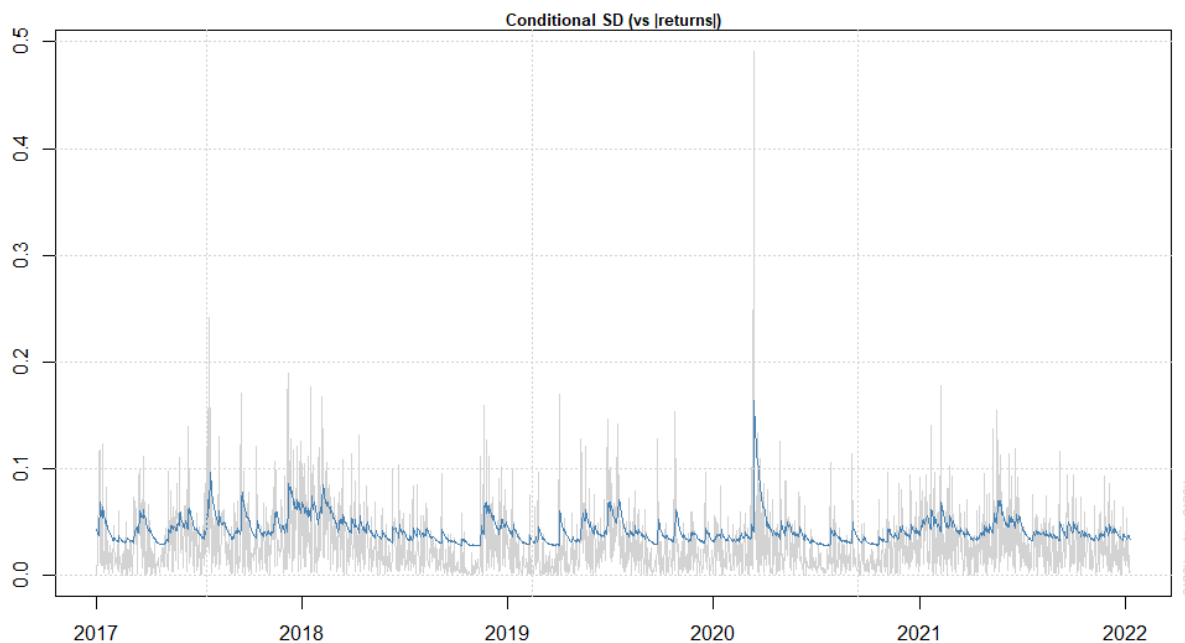
Wykres 10. Zmienność historyczna ETH i BTC w okresie 2017-2021 (tygodniowe okno)



Wykres 11. Zmienność warunkowa i dzienne zwroty dla ETH



Wykres 12. Zmienność warunkowa i dzienne zwroty dla BTC



W przypadku wykorzystywanego modelu GARCH(1,1) okres półtrwania wynosi:

$$\frac{\ln 0,5}{\ln(\alpha_1 + \beta_1)}$$

gdzie  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  to parametry modelu GARCH(1,1), a jednostką jest długość interwału, dla którego obliczane są zwroty (w badaniu wykorzystywane są zwroty dzienne). Oszacowane parametry i okresy półtrwania dla ETH i BTC zestawiono w tabeli 1. Średni czas zanikania dużej zmienności jest dość krótki, wynosi dla ETH około 9 dni, a dla BTC około 12 dni, co potwierdza wysoką dynamikę zmienności.

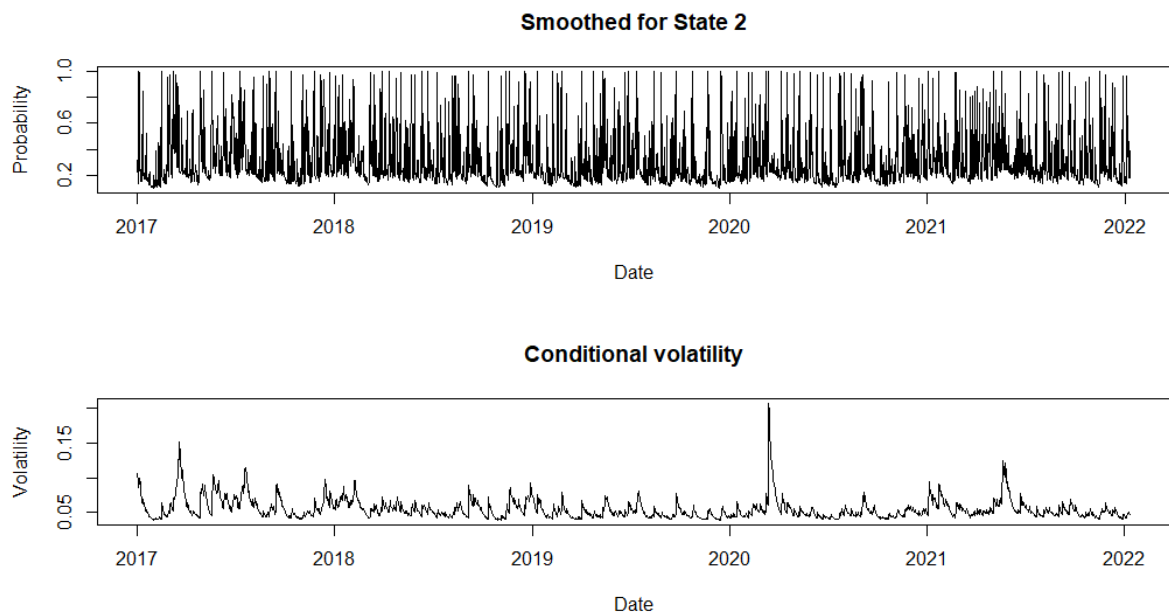
Tabela 1. Okresy półtrwania dla ETH i BTC oszacowane na podstawie modelu GARCH(1,1).

	<b>ETH</b>	<b>BTC</b>
$\alpha_1$	0,1212	0.1035
$\beta_1$	0.8053	0.8418
okres półtrwania	9,0737	12.3333

W celu sprawdzenia, czy w badanym okresie można wskazać okresy o niskiej i wysokiej zmienności, zastosowano przełącznikowy model GARCH z dwoma stanami (reżimami). W tego typu modelach zmienność jest opisywana przez modele GARCH o różnych parametrach. Jedna specyfikacja dotyczy reżimu o niskiej zmienności, druga o wysokiej. Przełączanie specyfikacji modelu pozwala na dokładniejszy opis dynamiki zmienności. Ponadto podejście to umożliwia oszacowanie prawdopodobieństw zmiany reżimu lub pozostania w dotychczasowym. W obu przypadkach, dla ETH i BTC zmiany stanu są bardzo częste, co obrazują wykresy 13-14, warunkowe prawdopodobieństwa zmiany aktualnego stanu zmieniają się bardzo często, trudno jest wyróżnić okresy o mniejszej lub większej zmienności.

W ostatnim etapie badania sprawdzono najdłuższy okres utrzymywania się zmienności warunkowej poniżej i powyżej określonego progu. Jako wartości graniczne wybrano kwantyle rzędu 0,1-0,9 z krokiem 0,1. Wyniki zamieszczono w tabeli 2. Dla obu kryptowalut najdłuższe okresy utrzymywania się niskiej zmienności są krótkie. Na przykład najdłuższy okres dla zmienności poniżej kwantyla rzędu 0,1 w przypadku ETH to 16 dni, a dla BTC 29 dni. Jednocześnie należy zwrócić uwagę, że kwantyl rzędu 0,1 oznacza w przypadku ETH zmienność roczną na poziomie ponad 67%, a dla BTC prawie 55%, co stanowi wartość kilka, a nawet kilkanaście razy większą od zmienności obserwowanej dla tradycyjnych aktywów. Jednocześnie najdłuższy okres ze zmiennością powyżej kwantyla rzędu 0,1 dla obu walut był dłuższy niż rok i wynosił odpowiednio dla ETH i BTC 372 i 483 dni. Warto zauważyć dysproporcję pomiędzy najdłuższymi okresami ze zmiennością powyżej i poniżej mediany. Dla ETH najdłuższy okres ze zmiennością poniżej mediany trwał 51 dni, a powyżej mediany 87 dni, z kolei dla BTC było to odpowiednio 45 i 179 dni.

Wykres 13. Prawdopodobieństwa zmiany aktualnego stanu i wartości zmienności warunkowej dla ETH.



Wykres 14. Prawdopodobieństwa zmiany aktualnego stanu i wartości zmienności warunkowej dla BTC.

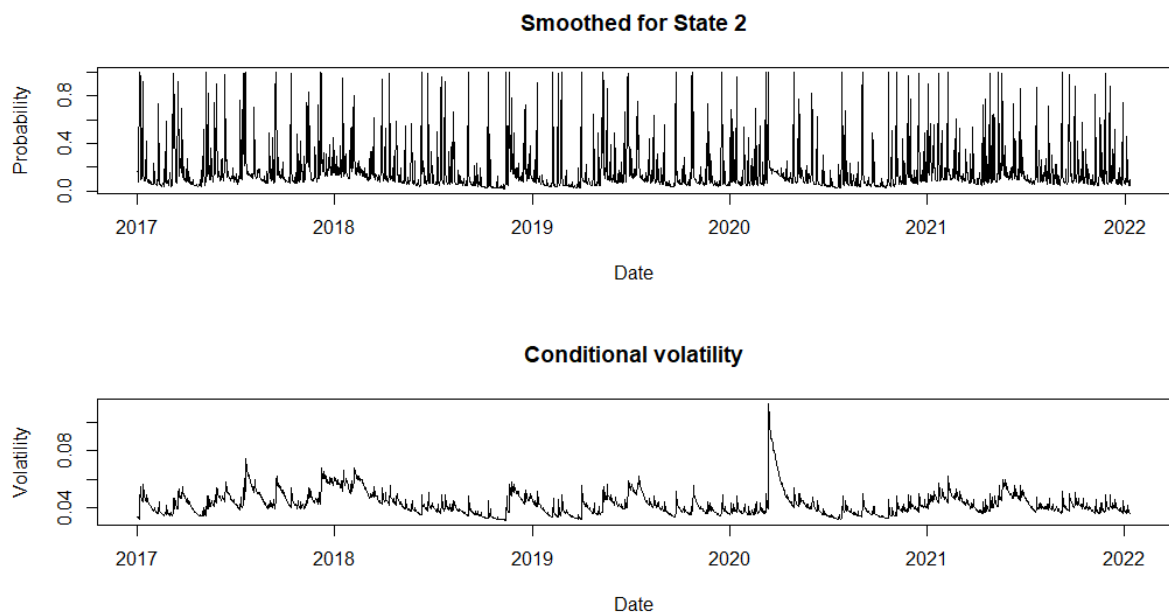


Tabela 2. Najdłuższy okres utrzymywania się zmienności warunkowej poniżej i powyżej określonego progu dla ETH i BTC.

rzęd kwa ntyl a	ETH			BTC		
	kwa ntyl	Maksymalny okres ze zmiennością (w dniach)		kwa ntyl	Maksymalny okres ze zmiennością (w dniach)	
		poniżej wskazanego kwantyla	powyżej wskazaneg o kwantyla		poniżej wskazanego kwantyla	powyżej wskazanego kwantyla
0,1	0.0426 (0.6737)	16	372	0.0345 (0.5461)	29	483
0,2	0.0446 (0.7053)	23	118	0.0362 (0.5737)	32	391
0,3	0.0465 (0.7356)	25	95	0.0376 (0.5948)	34	376
0,4	0.0487 (0.7703)	40	88	0.0392 (0.6193)	44	192
0,5	0.0510 (0.8068)	51	87	0.0406 (0.6412)	45	179
0,6	0.0536 (0.8482)	52	78	0.0425 (0.6720)	47	112
0,7	0.0572 (0.9038)	60	36	0.0452 (0.7142)	69	106
0,8	0.0626 (0.9895)	137	24	0.0480 (0.7588)	77	88
0,9	0.0724 (1.1450)	203	19	0.0530 (0.8387)	266	40

W nawiasach podane są wartości zmienności zannualizowane.

#### 4. Podsumowanie

W badanym okresie logarytmiczne stopy zwrotu ETH i BTC nie miały rozkładu normalnego i charakteryzowały się wysoką zmiennością. Nie jest to zaskakujący wniosek, ponieważ jest to typowe dla większości instrumentów finansowych. Jednak gruboogonowość i leptokurtyczność rozkładów oraz dynamika zmienności są w przypadku kryptowalut cechami jeszcze bardziej wyeksponowanymi niż ma to miejsce w przypadku klasycznych instrumentów. Cechy te mogą powodować, że model BSM będzie niedoszacowywał wartości opcji deep-out-of-the-money oraz powodował znaczne zmiany wycen opcji w krótkich interwałach czasowych. Jednak ze względu na to, że pozycja Dark Pool zbliża się do pozycji długiego stelaża [ang. long straddle], stosowanie modelu BSM nie generuje ryzyka biznesowego. Warto podkreślić, że długi stelaż jest strategią pozwalającą na realizację zysków w przypadku dużej zmienności, gdy wartości bezwzględne zmian cen są większe niż premie opcyjne. Nie ma gwarancji, że wysoka zmienność BTC i ETH utrzyma się w przyszłości, jednak obecnie brak jest przesłanek wskazujących, by ta cecha miała zaniknąć.